

(令 3 前)

# 数 学

(理 科 系)

(1 ~ 5 ページ)

・ ページ番号のついていない白紙は下書き用紙である。

注意 解答はすべて答案用紙の指定のところに記入しなさい。

数 学(理科系) 150 点

1.  $i$  を虚数単位とする. 以下の問に答えよ. (配点 30 点)

- (1)  $n = 2, 3, 4, 5$  のとき  $(2 + i)^n$  を求めよ. またそれらの虚部の整数を 10 で割った余りを求めよ.
- (2)  $n$  を正の整数とするととき  $(2 + i)^n$  は虚数であることを示せ.

**2.** 次の定積分を求めよ. (配点 30 点)

$$(1) I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$(2) J = \int_0^1 x^3 \log(x^2 + 1) dx$$

3.  $\vec{0}$  でない2つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  が垂直であるとする.  $\vec{a} + \vec{b}$  と  $\vec{a} + 3\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) とする. 以下の問に答えよ.  
(配点30点)

(1)  $|\vec{a}| = x$ ,  $|\vec{b}| = y$  とするとき,  $\sin^2 \theta$  を  $x, y$  を用いて表せ.

(2)  $\theta$  の最大値を求めよ.

4.  $m$  を実数とする. 座標平面上の放物線  $y = x^2$  と直線  $y = mx + 1$  の共有点を  $A, B$  とし, 原点を  $O$  とする. 以下の問に答えよ.

(配点 30 点)

(1)  $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$  が成り立つことを示せ.

(2) 3 点  $A, B, O$  を通る円の方程式を求めよ.

(3) 放物線  $y = x^2$  と (2) の円が  $A, B, O$  以外の共有点をもたないような  $m$  の値をすべて求めよ.

5. 座標平面上を運動する点  $P(x, y)$  の時刻  $t$  における座標が

$$x = \frac{4 + 5 \cos t}{5 + 4 \cos t}, \quad y = \frac{3 \sin t}{5 + 4 \cos t}$$

であるとき、以下の問に答えよ。(配点 30 点)

(1) 点  $P$  と原点  $O$  との距離を求めよ.

(2) 点  $P$  の時刻  $t$  における速度  $\vec{v} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$  と速さ  $|\vec{v}|$  を求めよ.

(3) 定積分  $\int_0^\pi \frac{dt}{5 + 4 \cos t}$  を求めよ.