

数 学

〈監督者の指示があるまで開いてはいけない〉

1. 試験開始後、まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後、速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。
落丁や乱丁があった場合は、手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は試験終了後、持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

次の操作を5回繰り返し、白玉、赤玉を左から順に1列に並べる。

操作：1個のさいころを投げて、4以下の目が出たときには白玉を1個おき、他の目が出たときには赤玉を1個、次に白玉を1個おく。

たとえば、さいころの出た目が順に「1 1 1 5 1」であったとすると、並べられた玉の個数は6個で、玉の色は左から順に「白 白 白 赤 白 白」となる。このとき、

- 並べられた玉の個数が7個で、左から3個目の玉が赤玉である確率は (ア)
- 左から5個目の玉が赤玉である確率は (イ)

である。

2. 曲線 $y = e^{x^2}$ ($x \geq 0$) を C とする。実数 a は $a > 1$ をみたす定数とし、 C 上の点 (a, e^{a^2}) における接線を l とする。 C と 2 直線 l , $x = 1$ で囲まれた部分の面積を S_1 , l と x 軸および y 軸で囲まれた部分の面積を S_2 とする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底とする。

(1) C と y 軸, および 2 直線 $y = e$, $y = e^{a^2}$ で囲まれた部分を, y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を a を用いて表せ。

(2) 極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S_1}{S_2}$ を求めよ。

3. a, b は互いに素である自然数の定数で, $a \geq 2$ とする。 $0 < x \leq \pi$ のとき,

$$\begin{cases} \cos x \leq \cos 2ax \\ \sin 2ax \leq 0 \end{cases}$$

をみたす x の値の範囲は, 互いに共通部分をもたない n 個の閉区間の和集合であり, それら n 個の閉区間の長さの値を小さい方から順に x_1, \dots, x_n とする。 $k = 1, \dots, n$ に対し $\theta_k = 2b(2a+1)x_k$ とおき, xy 平面において, 一般角 θ_k の動径と単位円との交点を Z_k とするとき, 次の問いに答えよ。ただし, 動径は原点を中心とし, x 軸の正の部分が始線とする。

(1) $n = a$ であり, $\theta_k = 2k\pi \frac{b}{a}$ ($k = 1, \dots, a$) と表されることを示せ。

(2) $k = 1, \dots, a$ に対し, kb を a で割ったときの商を q_k , 余りを r_k とする。 $1 \leq i < j \leq a$ をみたす任意の自然数 i, j に対し $r_i \neq r_j$ を示し, 点 Z_1, \dots, Z_a は単位円を a 等分する a 個の分点であることを示せ。

4. 実数 t は $0 < t < 1$ をみたす定数とする。1 辺の長さが 1 の正方形 $A_1B_1C_1D_1$ があり、四角形 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように帰納的につくる。

四角形 $A_nB_nC_nD_n$ がつくられたとき、

- 各辺 $A_nB_n, B_nC_n, C_nD_n, D_nA_n$ を $t:1-t$ に内分する点を、順に H_n, I_n, J_n, K_n とする。
- A_nJ_n と B_nK_n の交点 A_{n+1} , B_nK_n と C_nH_n の交点 B_{n+1} , C_nH_n と D_nI_n の交点 C_{n+1} , D_nI_n と A_nJ_n の交点 D_{n+1} を頂点として、四角形 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ をつくる。

$\triangle A_nA_{n+1}K_n$ の面積を a_n とするとき、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和が $\frac{1}{8}$ となるような定数 t の値を求めよ。